Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului

ISJCL

Inspectoratul Şcolar al Județului Călăraşi
str. Slobozie nr.28
tel. 0242.315949 fax. 0242.312810
isjcalarasi@gmail.com www.isj.cl.edu.ro

OLIMPIADA NAȚIONALA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 30 IANUARIE 2010

Clasa a IX-a

Problema 1. a) Dacă $x,\ y \in (0,+\infty)$, $x \cdot y = 1$ atunci arătați că : $\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1} \le 1$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ecuația : $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

c) Să se găsească numărul soluțiilor întregi şi pozitive ale ecuației: $\left[\frac{x}{2009}\right]=\left[\frac{x}{2010}\right]$. ($[x]$ este partea întreagă a numărului real *x*)

Gheorghe Fianu , Ştefan cel Mare şi Adriana Rusu, Oltenița

Problema 2. a) Arătați că : $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n^3-n}{3}$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că : $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n}} > 2n$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Fie mulțimile $A=\{4n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ şi $B=\{a^2-b^2 \mid a,\ b \in \mathbb{Z}\}$. Determinați mulțimea $A \cap B$.

Gheorghe Stoianovici şi Gabriela Ruse, Călăraşi

Problema 3. Fie $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, trei vectori nenuli astfel încât $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ şi $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$ să fie coliniari. Să se arate că $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt vectori coliniari.

G.M. 1 /2009

Problema 4. Fie mulțimea $M=\{k^3 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Să se determine funcția $f : \mathbb{N}^* \to M$ care are proprietatea $f(n+m)=f(n)+f(m)+3nm(n+m)$; $\forall n,\ m \in \mathbb{N}^*$.

Viorica Stoianovici , Călăraşi

SUCCES!

Notă : Durata concursului este de trei ore .
Baremul de notare este : **Problema 1** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ; c) 2 puncte; **Problema 2.** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ; c) 2 puncte; **Problema 3.** 7 puncte ; **Problema 4.** 7 puncte .

OLIMPIADA NAȚIONALA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 30 IANUARIE 2010

Clasa a X-a

Problema 1. a) Arătați că , orice număr natural de patru cifre , de forma $\overline{abcd}$, care verifica relația : $\lg\overline{abcd}$-$\lg\overline{abc}=1$, este divizibil cu 10 .

b) Arătați că: $[\log_2 2010]=[\log_3 2010]+[\log_5 2010]$.

Ştefan Florin Marcu , Călăraşi

Problema 2. Să se rezolve ecuațiile :

a) $4^{x^2-3x+2}+6^{x^2-3x+2}=2\cdot 9^{x^2-3x+2}$;

b) $1+2^x+24^x+27^x=4\cdot 6^x$.

Adrian Popescu, Călăraşi

Problema 3. Arătați că :

a) $\arcsin\dfrac{12}{13}-\arcsin\dfrac{3}{5}=\arcsin\dfrac{33}{65}$.

b) $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi,\ \forall x\geq 1.$

Adriana Constantin , Călăraşi

Problema 4. a) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ cu $z_1+z_2+z_3=0$ si $|z_1|=a,\ |z_2|=b,\ |z_3|=c$. Ştiind că $a^2+b^2=c^2$, arătați că $b^2z_1^2+a^2z_2^2=0$.

G.M. 3 /2009

b) Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 astfel încât $z_1+z_2\in\mathbb{R}$, $z_3\cdot z_1+\overline{z_3}\cdot z_2\in\mathbb{R}$ şi $z_3\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$. Să se demonstreze că $z_1^{2010}+z_2^{2010}\in\mathbb{R}$.

***

SUCCES!

__Notă :__ Durata concursului este de trei ore .
Baremul de notare este : **Problema 1.** a) 3 puncte ; b) 4 puncte ; **Problema 2.** a) 3 puncte ; b) 4 puncte ; **Problema 3.** a) 3 puncte ; b) 4 puncte ; **Problema 4.** a) 3 puncte ; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 30 IANUARIE 2010

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $f:\{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{C}$ o funcție injectivă și matricea $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i, j\le 4}$, unde $a_{ij}=f(i)+f(j), \forall i, j\in\{1, 2, 3, 4\}$. Să se determine rangul matricei A.

Viorica Stoianovici , Călăraşi

Problema 2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ şi ecuația $X^2-(a+d)X+ad-bc=0$. Dacă rădăcinile ecuației, notate cu z_1 și z_2, sunt distincte atunci definim matricele $X=\frac{1}{z_1-z_2}(A-z_2 I)$ şi $Y=\frac{1}{z_2-z_1}(A-z_1 I)$. Să se arate că $\forall n\in N^*$, $A^n=z_1^n X+z_2^n Y$.

Gheorghe Stoianovici , Călăraşi

Problema 3. Fie $a, b\in\mathbb{N}^*$ şi două şiruri de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, respectiv $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu proprietățile : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^a}=b$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{n^b}=a$. Calculați : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)}{(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2}$.

Ştefan Florin Marcu , Călăraşi

Problema 4. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m} ln\left(1+a_k^n\right) ln\left(1+\frac{b_k}{n}\right)$, unde $a_1, a_2,\ldots, a_m>1$ şi $b_1, b_2,\ldots, b_m>0$.

G.M. 5 /2009

SUCCES!

Notă : Durata concursului este de trei ore .
Baremul de notare este : **Problema 1.** 7 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte ; **Problema 4.** 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 30 IANUARIE 2010

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie grupurile $(G,\cdot)$ şi $(H,\cdot)$, unde $G=\{X\in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(X)\neq 0\}$, $H=\{X\in M_3(\mathbb{R}) \mid \det(X)\neq 0\}$ iar "$\cdot$" este operația de înmulțire a matricelor.

a) Să se arate că, dacă $X\in G$ şi $AX=XA,\ \forall A\in G$ atunci $\exists a\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $X=aI_2$.

b) Să se arate că există $f:G\to H$ un morfism injectiv de grupuri.

c) Să se arate că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(H,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

Ion Savu, Bucureşti şi Gheorghe Stoianovici , Călăraşi

Problema 2. Să se calculeze: $\int_9^{16}\frac{\sqrt{x^2+4x\sqrt{x-4}}}{x}dx$.

Adrian Popescu, Călăraşi

Problema 3. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, dacă $I_n=\int_0^1\left(1-x^n\right)^n dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Gheorghe Stoianovici , Călăraşi

Problema 4. Fie A un inel cu proprietatea: $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx+xyz+1,\ \forall x, y, z\in A^*$. Să se arate că A este un corp cu două elemente.

G.M. 7-8 /2008

SUCCES!

<u>Notă</u> : Durata concursului este de trei ore .
Baremul de notare este : **Problema 1.** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ; b) 2 puncte ; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte ; **Problema 4.** 7 puncte.